BỒI DƯỠNG VÀ LUYỆN THI

Năm học: 2015-2016

TÀI LIỆU NÂNG CAO

Chuyên Đề

PHƯƠNG TRÌNH
BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Phần Đặc Biệt

PHƯƠNG PHÁP
CÂN BẰNG TÍCH

G.v: Nguyễn Đại Dương

Chuyên Luyện Thi Quốc Gia Các Chuyên Đề :

- *Hình Phẳng Oxy*
- *Phương Trình & Bất phương trình Vô tỉ*
- *Hệ Phương trình*
- *Bất Đẳng Thức*

Địa chỉ : 76/5 Phan Thanh- Đà Nẵng

Tài liệu đặc biệt dành cho học sinh Lớp Toán luyện thi

Phương pháp cân bằng tích ứng dụng để giải một lớp các bài toán Phương Trình & Bất Phương trình Vô tỷ.

Tài liệu bao gồm:

Cơ sở lí thuyết.

Phương pháp chung.

Các ví dụ.

Bài tập vận dụng.

Các em phải biết học toán là phát triển tư duy, dù cho phương pháp có hay và dễ sử dụng đến mức nào nhưng người sử dụng không thể phát triển được nó thì cũng chỉ là học chay mà thôi. Hy vọng các em có thể nắm bắt bản chất để phát triển thêm nữa phương pháp này.

Trong tài liệu tôi cố gắng sử dụng các ví dụ tiêu biểu cho từng bài toán riêng biệt, mỗi ví dụ là một kinh nghiệm cũng như một bài học. Đọc hết tài liệu các em sẽ có một cái nhìn tổng quát và đầy đủ về phương pháp này.

Hiển nhiên trong bất kì tài liệu nào cũng sẽ có những thiếu sót, mong các em góp ý để tài liệu được hoàn thiện hơn cho các lứa học sinh sau.

Chúc các em học tốt!

Mọi góp ý xin gửi về:

Địa chỉ mail : *ginzorodn@gmail.com*

Facebook: *www.facebook.com/100000226390946*

Website: *www.toanmath.com*

Tác giả: Nguyễn Đại Dương

PHƯƠNG PHÁP CÂN BẰNG TÍCH

Cơ sở: *Cho phương trình có dạng* $g(x)=h(x)\sqrt[n]{f(x)}$*. Với* $f(x),g(x),h(x)$ *là các đa thức.*

Nếu phương trình có nghiệm $x=x_o$ *là nghiệm của biểu thức* $\sqrt[n]{f(x)}=A(x)$ *thì luôn tồn tại một phân tích dạng:*

$$\boxed{g(x)-h(x)\sqrt[n]{f(x)}=\left(A(x)-\sqrt[n]{f(x)}\right).B(x)}$$

Trong các bài toán ta xét thì :

- *Bậc của căn là bậc 2 hoặc bậc 3.*
- *Đa thức* $f(x),h(x)$ *và* $g(x)$ *có bậc bé hơn hoặc bằng 4.*
- *Đa thức* $A(x)$ *thường sẽ là một biểu thức bậc 1:* $A(x)=ax+b$.

Phương pháp :

Bước 1 : *Sử dụng Casio để tìm biểu thức* $A(x)$*:*

Nhập phương trình $g(x)=h(x)\sqrt[n]{f(x)}$ *vào máy bấm* [SHIFT] [SOLVE] *máy hiện* [Sovle for X] *nhập tùy ý một giá trị X bấm* [=]*. Đợi máy hiện giá trị của X bấm* [SHIFT] [STO] [A] *để gán giá trị của nghiệm cho A.*

Bấm [MODE] *7 máy hiện* [f(X) =] *nhập biểu thức* $\sqrt[n]{f(A)}-AX$ [=] *máy hiện* [Start?] *Nhập -10* [=] *máy hiện* [End ?] *nhập 10* [=] *máy hiện* [Step] *nhập 1* [=] *, máy hiện một bảng với một bên là giá trị xủa X một bên là giá trị của f(X), ta sẽ lấy giá trị mà tại đó X và f(X) là hai số nguyên (hoặc hữu tỉ).*

Khi đó biểu thức cần tìm chính là $A(x)=X.x+f(X)$ *với X và f(X) là các giá trị nguyên đã chọn.*

Bước 2 : *Cân bằng tích :*

Ta sẽ cân bằng hai vế với các biểu thức $\sqrt[n]{f(x)}$*,* $A(x)$ *và* $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n=f(x)$*,* $A^n(x)$ *để đưa phương trình về dạng:*

$$\boxed{k(x)A^n(x)+h(x)A(x)=k(x)f(x)+h(x)\sqrt[n]{f(x)}}$$

Trong đó $g(x)=k(x)\left[A^n(x)-f(x)\right]-h(x)A(x)$

Tùy vào biểu thức $g(x)$ *mà ta sẽ lựa chọn* $k(x)$ *phù hợp để cân bằng. Thông thường thì* $k(x)$ *sẽ là hệ số a, biểu thức bậc nhất* $ax+b$*, biểu thức bậc 2* ax^2+bx+c *hay phân thức* $\frac{m}{ax+b}\dots$

Chú ý : *Biểu thức A(x) thông thường là bậc nhất nhưng cũng có thể là biểu thức bậc cao và ta phán đoán A(x) dựa vào từng bài toán.*

***Ví dụ 1:** Giải phương trình:* $\sqrt{x+2}=2-x^2$ *(1)*

Điều kiện : $x\geq -2$

Nhập biểu thức: $\sqrt{X+2}=2-X^2$

Bấm SHIFT SOVLE *0* = *máy hiện* $X=0.6180339887$ *bấm* SHIFT STO A *máy hiện* $Ans\to A$

Bấm MODE *7 nhập* $f(X)=\sqrt{A+2}-AX$ $=-10=10=1=$ *máy hiện bảng và ta thấy có giá trị nguyên là* $X=1, f(X)=1$. *Khi đó ta suy ra* $A(x)=x+1$ *hay* $\sqrt{x+2}=x+1$

Ta viết lại phương trình và đi cân bằng như sau:

$$Pt\Leftrightarrow 2-x^2=\sqrt{x+2}$$

Đầu tiên ta cân bằng cho $\sqrt{x+2}$ *và* $x+1$:

$$\boxed{...(x+1)=...\sqrt{x+2}}$$

Khi đó VT còn thừa lại : $2-x^2-(x+1)=1-x-x^2$

Ta tiếp tục cân bằng thêm 2 vế cho : $\sqrt{x+2}^2=x+2$ *và* $(x+1)^2$. *Do biểu thức cân bằng có bậc 2 và bậc của biểu thức còn thừa cũng là 2 nên ta cân bằng với hệ số a :*

$$\boxed{a(x+1)^2+(x+1)=a(x+2)+\sqrt{x+2}}\ (*)$$

Khi đó để (*) tương đương với (1) thì $a(x+1)^2-a(x+2)=1-x-x^2$, *đồng nhất ta được* $a=-1$

$$Pt\quad \Leftrightarrow -(x+1)^2+(x+1)=-(x+2)+\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[x+2-(x+1)^2\right]+\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+x+1\right)\left(\sqrt{x+2}-(x+1)\right)+\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-x-1\right)\left(\sqrt{x+2}+x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=x+1\\ \sqrt{x+2}=-x\end{array}\right.$$

TH: $\sqrt{x+2}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases}x+1\geq 0\\ x+2=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

TH: $\sqrt{x+2}=-x\Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 0\\ x+2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$

So sánh với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, x=-1$

Ví dụ 2: *Giải phương trình:* $2x^2+x-2=(x-1)\sqrt{x+2}$

Điều kiện: $x\geq -2$

Nhập Casio ta tìm được biểu thức cân bằng $\sqrt{x+2}=x+1$

Ta cân bằng tích như sau:

Ta cân bằng cho $\sqrt{x+2}$ *và* $x+1$*:*

$$\boxed{...(x-1)(x+1)=...(x-1)\sqrt{x+2}}$$

Do $\sqrt{x+2}$ *nhân với lượng* $(x-1)$ *nên* $x+1$ *cũng vậy.*

Khi đó VT còn thừa lại: $2x^2+x-2-(x-1)(x+1)=x^2+x-1$

Ta cân bằng tiếp cho $\sqrt{x+2}^2=x+2$ *và* $(x+1)^2$. *Do bậc của biểu thức cân bằng và biểu thức còn thừa đều là bậc 2 nên ta cân bằng với hệ số a:*

$$\boxed{a(x+1)^2+(x-1)(x+1)=a(x+2)+(x-1)\sqrt{x+2}}$$

Chuyển vế đồng nhất hệ số: $a(x+1)^2-a(x+2)=x^2+x-1\Leftrightarrow a=1$

Pt $\Leftrightarrow (x+1)^2+(x-1)(x+1)=(x+2)+(x-1)\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow\left[(x+1)^2-(x+2)\right]+(x-1)\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+1-\sqrt{x+2}\right)\left(2x+\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=x+1\\ \sqrt{x+2}=-2x\end{array}\right.$$

TH: $\sqrt{x+2}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geq 0\\ x+2=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

TH: $\sqrt{x+2}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ x+2=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$

So sánh với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, x=\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$

Chú ý:

Khi bài toán có nhiều nghiệm lẻ thì ta có thể lưu nghiệm bất kì và tìm biểu thức cân bằng, thông thường mỗi nghiệm lẻ sẽ cho ta một biểu thức cân bằng khác nhau. Dù biểu thức cân bằng khác nhau nhưng kết quả sau khi cân bằng là giống nhau.

Ví dụ 3: *Giải phương trình:* $x^3-3x^2-3x+2\sqrt{(x+1)^3}=0$

Điều kiện: $x\ge -1$

Nhập CASIO ta được bảng không có bộ giá trị X, f(X) nguyên nào, tất cả đều là số lẻ… Đến đây ta hiểu rằng phương trình không có nhân tử chung dạng $\sqrt{X+1}=aX+b$ *với a, b là hệ số nguyên. Thực chất khi đi làm như các ví dụ trên ta đã mặc định hệ số ứng với* $\sqrt{X+1}$ *là 1 nhưng thực tế thì nhân tử của phương trình phải có dạng:* $k\sqrt{X+1}=aX+b$ *Với k, a, b là số nguyên, thường khi* $k=1$ *không cho ta bộ X, f(X) nguyên thì ta thay* $k=2,3,4...$

Ta nhập lại biểu thức: $f(X)=2\sqrt{A+1}-AX$ *và thu được biểu thức cân bằng* $2\sqrt{x+1}=-x$.

Ta cân bằng tích như sau: *Pt* $\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x=-2(x+1)\sqrt{x+1}$

Ta cân bằng cho $-x$ *và* $2\sqrt{x+1}$:

$$\boxed{...-(x+1)(-x)=...-(x+1)2\sqrt{x+1}}$$

Khi đó VT còn thừa lại: $x^3-3x^2-3x-(x+1)x=x^3-4x^2-4x$

Ta cân bằng tiếp cho $(-x)^2$ *và* $\left(2\sqrt{x+1}\right)^2=4(x+1)$. *Nhưng do biểu thức còn thừa bậc 3 mà các lượng cân bằng chỉ bậc 2 nên ta sẽ cân bằng với biểu thức bậc nhất* $ax+b$:

$$\boxed{(ax+b)x^2-(x+1)(-x)=(ax+b)4(x+1)-(x+1)2\sqrt{x+1}}$$

Chuyển vế đồng nhất hệ số: $(ax+b)x^2-(ax+b)4(x+1)=x^3-4x^2-4x\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$

$$\begin{aligned}Pt&\Leftrightarrow x.x^2-(x+1)(-x)=x.4(x+1)-(x+1)2\sqrt{x+1}\\&\Leftrightarrow x\left[x^2-4(x+1)\right]+(x+1)\left(x+2\sqrt{x+1}\right)=0\\&\Leftrightarrow x\left(x+2\sqrt{x+1}\right)\left(x-2\sqrt{x+1}\right)+(x+1)\left(x+2\sqrt{x+1}\right)=0\\&\Leftrightarrow\left(x+2\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+x+1-2x\sqrt{x+1}\right)=0\\&\Leftrightarrow\left(x+2\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)^2=0\end{aligned}$$

TH: $x+2\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\4(x+1)=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=2-2\sqrt{2}$

TH: $x-\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x+1=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

So sánh với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm $x=2-2\sqrt{2}$ *và* $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 4: *Giải phương trình:* $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

Nhập CASIO ta được nghiệm $x=1$ *và* $x=-1,618...$ *ta lưu nghiệm* $x=-1,618...$ *và tìm được biểu thức cân bằng là* $\sqrt[3]{2x-1}=x$

Ta đi cân bằng tích như sau:

Ta đi cân bằng cho x và $\sqrt[3]{2x-1}$*:*

$$\boxed{...2x=...2\sqrt[3]{2x-1}}$$

Khi đó VT còn thừa lại: $x^3+1-2x=x^3-2x+1$

Ta cân bằng tiếp cho $\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3=2x-1$ *và* x^3*:*

$$\boxed{ax^3+2x=a(2x-1)+2\sqrt[3]{2x-1}}$$

Chuyển vế đồng nhất hệ số: $ax^3-a(2x-1)=x^3-2x+1\Rightarrow a=1$

Pt $\Leftrightarrow x^3+2x=(2x-1)+2\sqrt[3]{2x-1}$

$$\Leftrightarrow x^3-(2x-1)+2\left(x-\sqrt[3]{2x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt[3]{2x-1}\right)\left[x^2+x\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{(2x-1)^2}+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^3=2x-1$$

$$\Leftrightarrow x=1\vee x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ *và* $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

<u>Chú ý:</u> Khi đi tìm biểu thức A(x) để cân bằng thì ta luôn lưu nghiệm lẻ (nếu có) của bài toán bởi vì với nghiệm lẻ thì các bộ X, f(X) nguyên là duy nhất.

Ví dụ 5: *Giải phương trình:* $x^3-2x^2+5x=2\sqrt[3]{5x^2+3}$

Nhập CASIO ta được nghiệm $x=1$.

Một vấn đề nãy sinh khi nghiệm của phương trình nguyên hoặc hữu tỉ thì bảng thu được có rất nhiều bộ giá trị nguyên, ta phải chọn một bộ X, f(X) nào đó để cân bằng.

Ta biết rằng biểu thức cần tìm sẽ có dạng $\sqrt[3]{5x^2+3}=ax+b$ *với a, b nguyên*

Việc lựa chọn a sẽ phụ thuộc vào hệ số của lũy thừa lớn nhất ở đây là x^3*, hệ số là 1 và ta sẽ chọn hệ số a thỏa mãn a là một ước của 1. Như vậy ta chọn biểu thức cân bằng là* $\sqrt[3]{5x^2+3}=x+1$

Ta cân bằng tích như sau:

Ta cân bằng $x+1$ *và* $\sqrt[3]{5x^2+3}$*:*

$$\boxed{...2(x+1)=...2\sqrt[3]{5x^2+3}}$$

Khi đó VT còn thừa lại: $x^3-2x^2+5x-2(x+1)=x^3-2x^2+3x-2$

Ta cân bằng tiếp cho $\left(\sqrt[3]{5x^2+3}\right)^3=5x^2+3x$ *và* $(x+1)^3$*:*

$$\boxed{a(x+1)^3+2(x+1)=a\left(5x^2+3\right)+2\sqrt[3]{5x^2+3}}$$

Chuyển vế đồng nhất hệ số: $a(x+1)^3-a\left(5x^2+3\right)=x^3-2x^2+3x-2\Leftrightarrow a=1$

$$Pt \Leftrightarrow (x+1)^3+2(x+1)=\left(5x^2+3\right)+2\sqrt[3]{5x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3-\left(5x^2+3\right)+2\left(x+1-\sqrt[3]{5x^2+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt[3]{5x^2+3}\right)\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{5x^2+3}+\sqrt[3]{\left(5x^2+3\right)^2}+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{5x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2+3x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$

Chú ý:

Với các bài toán có nghiệm nguyên thì việc chọn biểu thức phụ thuộc vào hệ số của lũy thừa lớn nhất. Ta chọn hệ số của x là ước của hệ số của lũy thừa lớn nhất.

Nếu chọn hệ số không đúng thì ta sẽ không cân bằng được mặc dù biểu thức của ta vẫn chứa nghiệm. Các em có thể tự kiểm chứng lại với bài toán trên bằng cách chọn bộ X, f(X) khác và đi cân bằng lại.

***Ví dụ 6:** Giải phương trình:* $4x^2+6x+6=\left(x^2+7x\right)\sqrt{x+\frac{3}{x}}$

Điều kiện: $x>0$

Do biểu thức dưới căn có dạng phân số nên ta nhân x vào trong căn để đưa về dạng đa thức:

$$Pt \Leftrightarrow 4x^2+6x+6=(x+7)\sqrt{x^3+3x}$$

Nhập CASIO ta được hai nghiệm $x=1$ *và* $x=3$.

Ta tìm biểu thức cân bằng như sau : $\begin{cases}\sqrt{1^3+3.1}=a.1+b\\ \sqrt{3^3+3.3}=a.3+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x^3+3x}=2x$

Ta đi cân bằng tích:

Cân bằng cho 2x và $\sqrt{x^3+3x}$:

$$\boxed{...(x+7)2x=...(x+7)\sqrt{x^3+3x}}$$

Khi đó VT còn thừa lại: $4x^2+6x+6-(x+7)2x=2x^2-8x+6$

Ta cân bằng tiếp cho $(2x)^2=4x^2$ *và* $\left(\sqrt{x^3+3x}\right)^2=x^3+3x$, *do phần còn thừa có bậc 2 nhưng biểu thức cân bằng có bậc là 3 nên ta sẽ cân bằng với phân thức* $\frac{a}{x}$ *(Do hai lượng cân bằng có nhân tử chung là x):*

$$\boxed{\frac{a}{x}4x^2+(x+7)2x=\frac{a}{x}\left(x^3+3x\right)+(x+7)\sqrt{x^3+3x}}$$

Chuyển vế đồng nhất hệ số: $\frac{a}{x}4x^2-\frac{a}{x}\left(x^3+3x\right)=2x^2-8x+6\Leftrightarrow a=-2$

$$Pt \Leftrightarrow -\frac{2}{x}4x^2+(x+7)2x=-\frac{2}{x}\left(x^3+3x\right)+(x+7)\sqrt{x^3+3x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x}\left[4x^2-\left(x^3+3x\right)\right]+(x+7)\left(2x-\sqrt{x^3+3x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x^3+3x}\right)\left[x+3-\frac{2}{x}\sqrt{x^3+3x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\sqrt{x^3+3x}\\ x+3=\frac{2}{x}\sqrt{x^3+3x}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=1\vee x=3$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1, x=3$

<u>Phương án 2:</u> Cân bằng kép

Ta có biểu thức cân bằng là : $\sqrt{x^3+3x}=2x \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{x^2+3}=2\sqrt{x}}$

Cân bằng cho 2x và $\sqrt{x^3+3x}$ *:*

$$\boxed{...(x+7)2x=...(x+7)\sqrt{x^3+3x}}$$

Khi đó VT còn thừa lại: $4x^2+6x+6-(x+7)2x=2x^2-8x+6$

Do bậc của biểu thức còn thừa là 2 nên ta sẽ chọn cân bằng tiếp cho cặp $\left(2\sqrt{x}\right)^2=4x$ *và* $\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2=x^2+3$ *thay cho cặp* $(2x)^2$ *và* $\left(\sqrt{x^3+3x}\right)^2$ *:*

$$\boxed{a(4x)+(x+7)2x=a\left(x^2+3\right)+(x+7)\sqrt{x^3+3x}}$$

Chuyển vế đồng nhất hệ số: $a(4x)-a\left(x^2+3\right)=2x^2-8x+6 \Leftrightarrow a=-2$

Pt $\Leftrightarrow -2(4x)+(x+7)2x=-2\left(x^2+3\right)+(x+7)\sqrt{x^3+3x}$

$\Leftrightarrow -2\left[4x-\left(x^2+3\right)\right]+(x+7)\left(2x-\sqrt{x^3+3x}\right)=0$

$\Leftrightarrow -2\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x^2+3}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{x^2+3}\right)+(x+7)\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x}-\sqrt{x^2+3}\right)\left[(x+3)\sqrt{x}-2\sqrt{x^2+3}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sqrt{x}=\sqrt{x^2+3}\\(x+3)\sqrt{x}=2\sqrt{x^2+3}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=3$

<u>Chú ý:</u> Cân bằng kép nghĩa là cân bằng với hai cặp đại lượng. Chỉ xuất hiện khi biểu thức cân bằng có nhân tử chung.

Ví dụ 7: *Giải phương trình:* $(x+1)(x-1)^3+(2x+1)\sqrt{3x+1}=7x-x^2$

Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{3}$

Nhập CASIO được nghiệm $x=0$ *và* $x=1$. *Ta tìm được biểu thức cân bằng là* $\sqrt{3x+1}=x+1$

Ta cân bằng tích như sau:

$$Pt \Leftrightarrow x^4-2x^3+x^2-5x-1=-(2x+1)\sqrt{3x+1}$$

Ta cân bằng cho $x+1$ *và* $\sqrt{3x+1}$:

$$\boxed{...-(2x+1)(x+1)=...-(2x+1)\sqrt{3x+1}}$$

VT còn thừa lại: $x^4-2x^3+x^2-5x-1+(2x+1)(x+1)=x^4-2x^3+3x^2-2x$

Ta cân bằng tiếp cho $(x+1)^2$ *và* $\left(\sqrt{3x+1}\right)^2$, *do biểu thức còn thừa bậc 4 mà các lượng cân bằng chỉ bậc 2 nên ta sẽ cân bằng với biểu thức bậc 2* ax^2+bx+c:

$$\boxed{(ax^2+bx+c)(x+1)^2-(2x+1)(x+1)=(ax^2+bx+c)(3x+1)-(2x+1)\sqrt{3x+1}}$$

Chuyển vế đồng nhất hệ số: $(ax^2+bx+c)(x+1)^2-(ax^2+bx+c)(3x+1)=x^4-2x^3+3x^2-2x$

$$\Rightarrow a=1, b=-1, c=2$$

$$Pt \quad \Leftrightarrow (x^2-x+2)(x+1)^2-(2x+1)(x+1)=(x^2-x+2)(3x+1)-(2x+1)\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x+2)\left[(x+1)^2-(3x+1)\right]-(2x+1)\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)\left(x^3-x+1+(x^2-x+2)\sqrt{3x+1}\right)=0$$

Ta có: $x^3-x+1+(x^2-x+2)\sqrt{3x+1}>0 \quad \forall x \ge -\frac{1}{3}$

$$Pt \quad \Leftrightarrow x+1-\sqrt{3x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1, x=0$.

Ví dụ 8: *Giải phương trình:* $(x+1)(x-1)^3 = x^2 - 2x + \sqrt{2x^3+1}$

Điều kiện: $2x^3+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Nhập CASIO ta được nghiệm $x = 2,7320...$*MODE 7 ta được* $\sqrt{2x^3+1} = 2x+1$

Ta đi cân bằng: $(ax+b)(2x+1)^2 + (2x+1) = (ax+b)(2x^3+1) + \sqrt{2x^3+1}$

Chuyển vế đồng nhất: $(ax+b)(2x+1)^2 - (ax+b)(2x^3+1) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2$ *ta không tìm được a, b thỏa mãn. Khi điều này xãy ra ta có thể hiểu rằng biểu thức cân bằng ta tìm được là chưa đúng.*

Ta sẽ thay đổi suy nghĩ một chút: Ta biết rằng phương trình sẽ luôn có nhân tử dạng $\sqrt{2x^3+1} = A(x)$ *nhưng không phải biểu thức bậc 1 :* $A(x) = ax+b$*, do bậc của phương trình là 4 nên ta nghĩ ngay đến* $A(x) = ax^2+bx+c$ *nghĩa là biểu thức cân bằng có bậc 2.*

Ta sẽ có các hướng tìm biểu thức như sau:

- *Một cách đơn giản nếu* $b=0$ *thì ta có biểu thức cân bằng* $\sqrt{2x^3+1} = ax^2+b$*. Ta hy vọng sẽ có một phân tích đơn giản như trên. Ta nhập vào máy như sau:*

  MODE 7 $f(X) = \sqrt{2A^3+1} - A^2X$ *máy hiện bảng và có một bộ giá trị* $X=1, f(X)=-1$*. Ta suy ra biểu thức cân bằng là* $\sqrt{2x^3+1} = x^2-1$

- *Để ý thấy bậc của lũy thừa lớn nhất là 1* (x^4) *nên ta sẽ chọn* $a=1$*, biểu thức cân bằng có dạng* $\sqrt{2x^3+1} = x^2+bx+c$*. Ta sẽ nhập vào máy như sau:*

  MODE 7 $f(X) = \sqrt{2A^3+1} - A^2 - AX$ *máy hiện bảng và ta có bộ giá trị* $X=0, f(X)=-1$*. Ta suy ra biểu thức cân bằng là* $\sqrt{2x^3+1} = x^2-1$*.*

Chú ý:

Bài toán dù có phức tạp đến mấy thì các biểu thức cân bằng thường sẽ cũng đơn giản như hai hướng trên.

Thực tế bài toán trên ta vẫn có thể cân bằng với lượng $\frac{x^2+1}{2x}$ ***thay cho*** $ax+b$ ***nhưng cách cân bằng thêm lượng trên lại đi ngược từ kết quả bài toán, không thích hợp với lối tư duy của phương pháp.***

$$Pt \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - x^2 - 1 = \sqrt{2x^3+1}$$

Ta cân bằng tích được: $\Leftrightarrow \left(x^2 - 1 - \sqrt{2x^3+1}\right)\left(x^2 - x + \sqrt{2x^3+1}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2-1=\sqrt{2x^3+1} \quad Do \quad f(x)=x^2-x+\sqrt{2x^3+1}>0 \quad \forall x\ge -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ (x^2-1)^2=2x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1+\sqrt{3}$$

So sánh với điều kiện, phương trình có một nghiệm $x=1+\sqrt{3}$.

Ví dụ 9: *Giải phương trình:* $2(x-1)\sqrt{2x+1}+1=\sqrt{5-6x}$

Điều kiện: $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{5}{6}$

Bài toán chứa hai căn bậc 2 không phải là dạng để ta cân bằng tích nhưng các biểu thức dưới căn cũng như ngoài căn đều là bậc 1, khá đơn giản và khi bình phương thì các biểu thức thu được tối đa là bậc 3. Nên ta sẽ bình phương hai vế để đưa về dạng cân bằng tích:

$$\Rightarrow \left[2(x-1)\sqrt{2x+1}+1\right]^2=5-6x$$
$$\Leftrightarrow 4x^3-3x^2+2(x-1)\sqrt{2x+1}=0$$

Nhập CASIO ta được biểu thức cân bằng là $\sqrt{2x+1}=2x$

Cân bằng tích ta được:

Pt $\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{2x+1}\right)\left(4x^2-4x+4+2x\sqrt{2x+1}\right)=0$

Ta có: $4x^2-4x+4+2x\sqrt{2x+1}=3x^2-2x+3+\left(x+\sqrt{2x+1}\right)^2>0 \quad \forall x\ge -\frac{1}{2}$

Pt $\Leftrightarrow 2x=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4x^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Thử lại ta thấy $x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ *là nghiệm.*

Ví dụ 10: *Giải bất phương trình:* $x^3+x^2\ge (x+2)\left(\sqrt{2x+3}-1\right)$

Điều kiện: $x\ge -\frac{3}{2}$.

Sử dụng kĩ thuật cân bằng tích:

Bpt $\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{2x+3}\right)\left(x^2+2x^2+2+x\sqrt{2x+3}\right)\ge 0$

$$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{2x+3}\right)\left((x+1)^2+\left(x+\sqrt{2x+3}\right)^2\right)\ge 0$$

Do $(x+1)^2+\left(x+\sqrt{2x+3}\right)^2 \ge 0$ *với mọi* $x\in R$.

Xét $(x+1)^2+\left(x+\sqrt{2x+3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x=-1$

Xét $(x+1)^2+\left(x+\sqrt{2x+3}\right)^2 > 0$

Bpt $\Leftrightarrow x+1\ge\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge\sqrt{2}$

Kết hợp ta được tập nghiệm $S=\left[\sqrt{2},+\infty\right)\cup\{-1\}$

Ví dụ 11: *Giải bất phương trình:* $3\left(x^2-1\right)\sqrt{2x+1}<2\left(x^3-x^2\right)$

Điều kiện: $2x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{2}$

Bpt $\Leftrightarrow (x-1)\left[2x^2-3(x+1)\sqrt{2x+1}\right]>0$

Xét biểu thức: $f(x)=2x^2-3(x+1)\sqrt{2x+1}$

Dùng kĩ thuật cân bằng tích: $\Rightarrow f(x)=\left(x+1-2\sqrt{2x+1}\right)\left(2x+2+\sqrt{2x+1}\right)$

Bpt $\Leftrightarrow (x-1)\left(x+1-2\sqrt{2x+1}\right)\left(2x+2+\sqrt{2x+1}\right)>0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x+1-2\sqrt{2x+1}\right)>0$ *Do* $2x+2+\sqrt{2x+1}>0\ \forall x\ge-\frac{1}{2}$

Xét $x-1>0\Leftrightarrow x>1$

Bpt $\Leftrightarrow x+1-2\sqrt{2x+1}>0\Leftrightarrow x^2-6x-3>0\Leftrightarrow x<3-2\sqrt{3}\vee x>3+2\sqrt{3}$

Kết hợp $\Rightarrow x>3+2\sqrt{3}$

Xét $x-1<0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x<1$

Bpt $\Leftrightarrow x+1-2\sqrt{2x+1}<0\Leftrightarrow x^2-6x-3<0\Leftrightarrow 3-2\sqrt{3}<x<3+2\sqrt{3}$

Kết hợp $\Rightarrow 3-2\sqrt{3}<x<1$

Vậy ta có tập nghiệm của bất phương trình $S=\left(3-2\sqrt{3},1\right)\cup\left(3+2\sqrt{3},+\infty\right)$

Ví dụ 12: *Giải bất phương trình:* $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-2}\geq\sqrt{3\left(x^2-2x-2\right)}$

Điều kiện: $x\geq 1+\sqrt{3}$

Bpt $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-2}\right)^2\geq 3\left(x^2-2x-2\right)$

$\Leftrightarrow x^2-4x-2\leq\sqrt{x^3-x^2-2x}$

Nhập CASIO ta được biểu thức cân bằng: $\sqrt{x^3-x^2-2x}=2x+2\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x}=2\sqrt{x+1}$

Ta cân bằng tích cho $2x+2$ *và* $\sqrt{x^3-x^2-2x}$ *:*

$$\boxed{...2x+2\leq...\sqrt{x^3-x^2-2x}}$$

Do bậc của biểu thức còn thừa là 2 nên ta cân bằng thêm các lượng $\left(2\sqrt{x+1}\right)^2$ *và* $\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2$ *:*

$$\boxed{a\left(2\sqrt{x+1}\right)^2+2x+2\leq a\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2+\sqrt{x^3-x^2-2x}}$$

Chuyển vế đồng nhất ta được $a=-1$

Bpt $\Leftrightarrow-\left(2\sqrt{x+1}\right)^2+2x+2\leq-\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2+\sqrt{x^3-x^2-2x}$

$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-2x}\right)-\sqrt{x+1}\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-2x}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-2x}\geq 0$

$\Leftrightarrow x^2-6x-4\leq 0$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{3}\leq x\leq 3+\sqrt{13}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=\left[1+\sqrt{3},3+\sqrt{13}\right]$

***Chú ý**: Bài toán trên ta có thể nhân thêm lượng* $\frac{a}{x+1}$ *để cân bằng thay cho cân bằng kép.*

Bài tập vận dụng:

Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$

Giải phương trình: $4x^2-13x+5+\sqrt{3x+1}=0$

Giải phương trình: $5x^2+15x+2=3\sqrt{4x^2+2}$

Giải phương trình: $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$

Giải phương trình: $4x^2+\sqrt{2x+3}=8x+1$

Giải phương trình: $3x^2+3x+2=(x+6)\sqrt{3x^2-2x-3}$

Giải phương trình: $(2x+2)\sqrt{x^2+x+2}=x^2+5x+2$

Giải phương trình: $2x^2-6x+10-5(x-2)\sqrt{x+1}=0$

Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2+2}=\dfrac{3x^2+3x+2}{3x+1}$

Giải phương trình: $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$

Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$

Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2x-x}=\sqrt{9x^2+16}$

Giải phương trình: $x^3-15x^2+78x-141=5\sqrt[3]{2x-9}$

Giải phương trình: $x^3-6x^2+12x-7=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11}$

Giải phương trình: $-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^2}$

Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x\sqrt{x+\dfrac{6}{x}+5}$

Giải phương trình: $2x^3+3x^2+2x+1=(2x^2+3x)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}}$

Giải phương trình: $(x-1)(3x^2+1)=(x+1)\sqrt{x^2+x+1}$

Giải phương trình: $x^3-2x-6=(x^2-2x-6)\sqrt{x^2+1}$

Giải phương trình: $(5x-4)\sqrt{2x-3}-(4x-5)\sqrt{3x-2}=2$

Giải phương trình: $2\sqrt{x^3-3x^2+5x-6}=x^2-4x+9$

Giải phương trình: $2(x^2-x+6)=5\sqrt{x^3+8}$

Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0$

Giải phương trình: $4x^3+2x-1+\left(2x^2+2x+1\right)\sqrt[3]{6x^2+1}=0$

Giải bất phương trình: $2x^2+2x-1\geq(x+3)\sqrt{x+1}$

Giải bất phương trình: $2x^3-1\leq\left(x^2-2x-1\right)\sqrt{x^2+1}$

Giải bất phương trình: $x^2-x+1-(2x+1)\sqrt{2x-1}\geq 0$

Giải bất phương trình: $4x^3+22x^2+30x+12+\left(2x^2+3x\right)\sqrt{x+2}\geq 0$

Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+6x+5}\geq\sqrt{10x+14}$

Giải bất phương trình: $x^3-x\leq(2x-1)\sqrt{2-x^2}$

Giải bất phương trình: $27x^3-27x+12x-2<(x+2)\sqrt{x+1}$

Giải bất phương trình: $x^3+3x^2+5x+3\geq\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+1}$

Giải bất phương trình: $3x^2+8x+5\geq 5\sqrt[3]{x^2+1}$

Giải bất phương trình: $\sqrt{x}\geq\dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-2x^2+2x}$

Giải bất phương trình: $3+x-x^2\leq\sqrt{x^4-2x^3+x^2-1}$

Giải bất phương trình: $2\left(x^2+2\right)\geq 5\sqrt{x^3+1}$

Giải bất phương trình: $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x\left(x^2+2x-4\right)}\right)$

Giải bất phương trình: $1-2x-4x^3\geq\left(2x^2+2x+1\right)\sqrt[3]{6x^2+1}$

Giải bất phương trình: $x-1+\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2}\geq\dfrac{x^3-x^2}{(x+1)^3}$

Tản mạn!

Nguồn gốc của Phương Pháp.

Một buổi chiều mùa hè nóng nực tôi vào Youtube và xem một vài video về Bất Đẳng Thức thì có một vài video Cân Bằng Bất Biến của anh Trần Hưng-LS hiện lên. Dĩ nhiên đã biết đến phương pháp này từ trước nhưng chưa có dịp nào xem video của anh nên mới click vào xem thử, khi đó thấy phương pháp thật hay nhưng lại khá phức tạp và chỉ sử dụng được cho các bài toán đối xứng gần như hoàn toàn kiểu $f(u_x) = f(v_x)$*, một số cần đến sự tư duy và suy đoán khá rắc rối và các bài toán khác thì việc cân bằng cực kì khó khăn hay phải nói là bất khả thi.*

Trước đó khoảng tháng 6-2015 đã đọc được một số tài liệu về CASIO, năm 2014 thực sự mà nói thì không biết CASIO là thể loại gì (đến giờ vẫn ko biết cách giải hệ bậc nhất 2 ẩn bằng CASIO… và việc bấm CASIO còn nhờ học sinh bày cho ☹) mọi bài toán nghiệm lẻ trước đây hầu như được giải hoàn toàn bằng tay và suy luận tự nhiên. Trong rất nhiều thủ thuật dùng CASIO thì tôi chỉ chọn một cái cảm thấy là phù hợp và dễ hiểu nhất.

Ý tưởng về Cân Bằng Tích cũng đến khá tình cờ! Việc suy đoán biểu thức để cân bằng thì khá phức tạp, vậy nếu biết trước biểu thức cân bằng thì sao? Để trả lời câu hỏi đó thì tôi bắt đầu quá trình thử nghiệm, áp dụng vào các bài toán 1 căn nghiệm lẻ, nghiệm chẳn, nhiều nghiệm… và cuối cùng là xử lí một số dạng toán 2 căn. Sau khi hoàn thành Phương Pháp thì tìm cách để diễn đạt nó một cách đơn giản và dễ hiểu nhất có thể. Và áp dụng dạy thử cho lứa học sinh 98, mặc dù thời gian có hạn chế nhưng thu được kết quả tương đối tốt…Việc lựa chọn một cái tên cũng gắn liền với nền tảng tư duy của chính phương pháp này.

Hiển nhiên phương pháp nào cũng có ưu và khuyết, người đọc và vận dụng phải hiểu rõ các ưu điểm cũng như khuyết điểm thì mới có thể phát triển cũng như hoàn thiện hơn được.

Hy vọng Phương Pháp này cho người xem một cách tiếp cận tốt hơn cũng như cái nhìn mới hơn về việc xử lí các bài toán vô tỷ 1 căn cũng như một số bài toán 2 căn.

Chúc các thầy cô và các em học sinh một năm thành công!

Đà Nẵng, ngày 06-09-2015

Hãy truy cập vào website www.toanmath.com để tham gia thảo luận cũng như xem các video miễn phí về các chuyên đề luyện thi.

Đây là web mới hoàn toàn do tác giả sáng lập. Hy vọng các thầy cô, các bạn đồng nghiệp cũng như các em học sinh cùng tham thảo luận và chia sẻ kinh nghiệm, tạo một môi trường học tập tốt và hiệu quả cho tất cả mọi người. Chân thành cảm ơn và chào đón mọi người!